Axiom Paths - Esame n.1

Durata: 3 ore *(Consiglio: Non guardare materiale)*

Struttura: 3 esercizi. Punteggio indicativo: 10 + 10 + 10.

Esercizio 1 Sottospazi, somma e intersezione (Spazi vettoriali). *Tag: Calcoloso/Trasversale*

Siano in $\mathbb{R}^4$ i sottospazi

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x + 2y - z = 0, \quad y + z - t = 0\}$$

e

$$W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x - y + t = 0\}.$$

(a) Trovare una base e la dimensione di W_1 e di W_2.

(b) Determinare una base e la dimensione di $W_1 \cap W_2$.

(c) Determinare una base e la dimensione di $W_1 + W_2$.

(d) Verificare se $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$. In caso negativo, giustificare con la dimensione o con un controesempio esplicito.

(e) (Breve) Sia $v = (1, 0, 1, 0)$. Decidere se $v \in W_1 + W_2$ e, in caso affermativo, scrivere $v = w_1 + w_2$ con $w_i \in W_i$.

Esercizio 2 Applicazioni lineari, nucleo e immagine. *Tag: Calcoloso*

Si consideri lapplicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$T(x, y, z, t) = (x + 2y - z, \quad y + z + t, \quad x - y + 2t).$$

(a) Scrivere la matrice A di T rispetto alle basi canoniche.

(b) Calcolare $\operatorname{Ker} T$ e $\operatorname{Im} T$, fornendo basi e dimensioni. Verificare il teorema di rango-nullo.

(c) Decidere se T è iniettiva e/o suriettiva, motivando la risposta.

(d) Studiare la compatibilità del sistema $T(x, y, z, t) = (1, 2, 0)$ e descrivere linsieme delle soluzioni (se esiste).

(e) (Teoria breve) Dimostrare che, per ogni $u \in \mathbb{R}^4$ e $v \in \operatorname{Ker} T$, si ha $T(u + v) = T(u)$.

Esercizio 3 Determinanti, invertibilità, operazioni di riga. *Tag: Calcoloso/Teorico breve*

Si consideri la matrice dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare $\det A(a)$ usando *solo* proprietà del determinante e operazioni elementari di riga/colonna che non ne alterano (o ne controllano) il valore.

(b) Determinare per quali valori di a la matrice $A(a)$ è invertibile.

(c) Supponendo a in un valore per cui $A(a)$ è invertibile, spiegare come si potrebbe ottenere $A(a)^{-1}$ con il metodo di Gauss (non è richiesto il calcolo integrale, ma indicare chiaramente i passi).

(d) (Teoria breve) Dimostrare che se due righe (o due colonne) di una matrice quadrata sono uguali, allora il determinante è zero.

Istruzioni generali.

- Utilizzare il materiale è sconsigliato vista la natura del vero esame.
- Scrivere in maniera ordinata è consigliato per avere una visione più ottimale.
- Usare un cronometro/timer per le 3 ore prestabilite.

Rubrica di autovalutazione

Legenda rapida (come assegnare i punti)

- **Impostazione** (idea/metodo giusto): se lidea è corretta ma incompleta, assegna 5070% dei punti del criterio.
- **Sviluppo** (passi e calcoli): errori locali non propaganti $\leq$ 0.5 pt di penalità; errori strutturali (metodo sbagliato) $\geq$ 50% del criterio.
- **Giustificazioni**: affermazioni senza motivo scritto: 0.5 pt ciascuna, max 1.5 per esercizio.
- **Chiarezza/Notazione**: disordine o notazione scorretta: 0.5 pt (una volta sola).
- **Bonus** (+0.5 max/esercizio): verifica alternativa/controllo incrociato corretto.

Esercizio 1 — Max 10 pt

Criterio	Max	Punti
Impostazione corretta (tradurre vincoli, scelta del metodo per basi/dimensioni)	2	____
Sviluppo: calcolo basi di W_1 e W_2 con passi chiari	2	____
Intersezione $W_1 \cap W_2$: sistema e base corretti	2	____
Somma $W_1 + W_2$: dimensione e giustificazione (Grassmann o costruzione)	2	____
Verifica somma diretta / decomposizione del vettore dato	1	____
Chiarezza, notazione e controlli finali	1	____
Totale E1	**10**	____

Esercizio 2 — Max 10 pt

Criterio	Max	Punti
Matrice di T dalle basi canoniche (coerenza righe/colonne)	1	____
$\operatorname{Ker} T$: metodo, passi e base corretta	3	____
$\operatorname{Im} T$: metodo (rango/immagini colonne) e base corretta	2	____
Iniettività/suriettività con motivazione (rangonullo)	2	____
Compatibilità del sistema assegnato e descrizione soluzioni	1	____
Mini-teoria: proprietà $T(u + v) = T(u)$ per $v \in \operatorname{Ker} T$	1	____
Totale E2	**10**	____

Esercizio 3 — Max 10 pt

Criterio	Max	Punti
$\det A(a)$: strategia corretta (operazioni ammesse) e calcolo	5	____
Invertibilità: insieme dei valori di a con argomentazione	2	____
Schema Gauss per $A(a)^{-1}$: passi indicati correttamente	2	____
Mini-teoria: righe/colonne uguali $\Rightarrow \det = 0$	1	____
Totale E3	**10**	____

Somma e conversione voto

Totale punti: ________ su $10 + 10 + 10$.

Soluzioni

Esercizio 1 Sottospazi, somma e intersezione

(a) Basi e dimensioni di W_1 e W_2. $W_1 = \{(x,y,z,t) : x+2y-z=0,\ y+z-t=0\}$. Parametrizzando con $y,z \in \mathbb{R}$,

$$x = -2y+z, \qquad t = y+z \ \Rightarrow\ (x,y,z,t) = y(-2,1,0,1) + z(1,0,1,1).$$

Una base comoda è equivalente a

$$\mathcal{B}_{W_1} = \{(3,-1,1,0),\ (-2,1,0,1)\}, \qquad \dim W_1 = 2.$$

$W_2 = \{(x,y,z,t) : x-y+t=0\}$, cioè $x = y-t$ con y,z,t liberi:

$$(x,y,z,t) = y(1,1,0,0) + z(0,0,1,0) + t(-1,0,0,1).$$

Dunque

$$\mathcal{B}_{W_2} = \{(1,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (-1,0,0,1)\}, \qquad \dim W_2 = 3.$$

(b) $W_1 \cap W_2$. Metodo A (sistema). Aggiungiamo $x-y+t=0$:

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ y+z-t=0 \\ x-y+t=0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad \text{soluzione } \lambda(-1,1,1,2),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Quindi $\mathcal{B}_{W_1 \cap W_2} = \{(-1,1,1,2)\}$ e $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$.

Metodo B (substituzione rapida). Da W_2: $x = y-t$. Da W_1: $t = y+z$ e $x = z-2y$. Eguagliando x: $z-2y = y-(y+z) \Rightarrow 2y-2z=0 \Rightarrow y=z$, poi $t=2y$, $x=-y$.

(c) $W_1 + W_2$. Formula di Grassmann:

$$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 2+3-1 = 4.$$

Quindi $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$.

(d) Somma diretta? No, perché $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$ (è 1-dimensionale).

(e) Decomposizione di $v = (1,0,1,0)$. Poiché $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$, $v \in W_1 + W_2$. Una decomposizione (non unica) è

$$\underbrace{\tfrac{1}{4}(3,-1,1,0)}_{\in W_1} + \underbrace{\Big(\tfrac{1}{4}(1,1,0,0) + \tfrac{3}{4}(0,0,1,0)\Big)}_{\in W_2} = (1,0,1,0).$$

Controllo rapido. $\dim W_1 = 2$, $\dim W_2 = 3$, $\dim \cap = 1 \Rightarrow$ somma di dimensione 4.

Esercizio 2 Applicazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$T(x,y,z,t) = (x+2y-z,\ y+z+t,\ x-y+2t)$.

(a) Matrice rispetto alle basi canoniche.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Nucleo e immagine. Metodo A (riduzione). $\operatorname{rank} A = 3$, quindi $\dim \operatorname{Ker} T = 1$. Una base del nucleo è

$$\operatorname{Ker} T = \operatorname{span}\{(-7, 1, -5, 4)\}.$$

Una base dellimmagine si ottiene con le colonne pivot (1,2,3):

$$\Im T = \operatorname{span}\{(1, 0, 1),\ (2, 1, -1),\ (-1, 1, 0)\}.$$

Metodo B (immagini dei vettori canonici). $T(e_1) = (1, 0, 1)$, $T(e_2) = (2, 1, -1)$, $T(e_3) = (-1, 1, 0)$, $T(e_4) = (0, 1, 2)$ e

$$T(e_4) = \tfrac{7}{4}T(e_1) - \tfrac{1}{4}T(e_2) + \tfrac{5}{4}T(e_3),$$

quindi le prime tre bastano come base.

(c) Iniettività/suriettività. $\dim \operatorname{Ker} T = 1 \Rightarrow$ non iniettiva; $\operatorname{rank} A = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ suriettiva.

(d) Sistema $T(x, y, z, t) = (1, 2, 0)$. Compatibile (suriettività). Linsieme delle soluzioni è

$$(x, y, z, t) = \Big(\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{5}{4}, 0\Big) + s\,\Big(-\tfrac{7}{4}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{5}{4}, 1\Big), \quad s \in \mathbb{R},$$

ossia “particolare + nucleo”.

(e) Mini-teoria. Se $v \in \operatorname{Ker} T$, allora $T(u + v) = T(u) + T(v) = T(u) + 0 = T(u)$.

Esercizio 3 Determinante e invertibilità

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolo di $\det A(a)$. Metodo A (sviluppo sulla prima colonna). Solo $a_{11} = 1$ e $a_{21} = -1$ sono non nulli, quindi

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix} = 2a^2 + 2(2a+1) = 2(a+1)^2.$$

Metodo B (operazioni di riga, triangolarizzazione). $R_2 \leftarrow R_2 + R_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & a+2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

$R_3 \leftarrow R_3 - \frac{1}{a+2}R_2$ (det invariato): $R_3 = (0, 0, \frac{2a+3}{a+2}, 1)$. Poi $R_4 \leftarrow R_4 + \frac{1}{\frac{2a+3}{a+2}}R_3$ annulla lelemento -1 sotto il pivot in colonna 3. La matrice è ora triangolare superiore con diagonale

$$1,\ a + 2,\ \tfrac{2a+3}{a+2},\ a + \tfrac{a+2}{2a+3}.$$

Il prodotto dei pivot vale

$$(1) \cdot (a+2) \cdot \tfrac{2a+3}{a+2} \cdot \Big(a + \tfrac{a+2}{2a+3}\Big) = (2a+3) \cdot \tfrac{2(a+1)^2}{2a+3} = 2(a+1)^2.$$

(b) Invertibilità. $A(a)$ è invertibile $\iff \det A(a) \neq 0 \iff a \neq -1$.

(c) Come ottenere $A(a)^{-1}$ (schema Gauss). Per $a \neq -1$, si risolve

$$(A(a) \mid I_4) \xrightarrow{\text{Gauss}} (I_4 \mid A(a)^{-1}).$$

Passi: (1) usa $R_2 \leftarrow R_2 + R_1$ per zero sotto il primo pivot; (2) elimina in colonna 2 con R_3; (3) elimina in colonna 3 con R_4; (4) risalita (back substitution) per azzerare sopra i pivot. Ogni operazione si applica anche al blocco I_4.

(d) Mini-teoria (righe uguali $\Rightarrow$ det $= 0$). Se due righe sono uguali, scambiandole la matrice non cambia ma il determinante cambia segno:

$$\det A = -\det A \;\Rightarrow\; \det A = 0.$$

Controllo rapido. $\det A(a) = 2(a+1)^2 \Rightarrow$ zero doppio in $a = -1$.